第 31 講　統計的な推測

§1 母集団と標本

要点整理 と 公式

要点 ① 母集団と標本

「全数調査」… 調査対象となる集団の全部について調べる調査

「標本調査」… 調査対象となる集団全体からその一部を抜き出して調べる調査

標本調査において

「 母集団 」… 調査対象となる集団全体

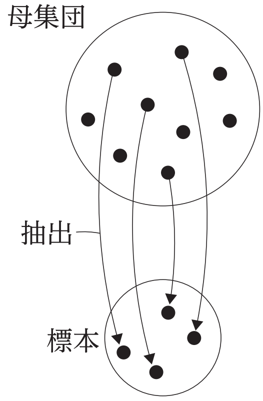
「 個体 」… 母集団に属する個々のもの

「 母集団の大きさ 」… 母集団に属する個体の総数

「 標本 」… 調査の母集団から選び出された一部分

「 抽出 」… 母集団から標本を選び出すこと

「 標本の大きさ 」… 標本に属する個体の総数



標本調査の目的は, 抽出された標本の性質から, 母集団の性質を推測することである。よって, 標本に属する個体をかたよりなく母集団から抽出することが必要である。

「 無作為抽出 」… 母集団のどの個体も同じ確率で抽出する方法。
乱数さいや乱数表, コンピュータなどを利用して行う。

「 無作為標本 」… 無作為抽出によって抽出された標本

母集団から標本を抽出するとき, 1 個の個体を抽出するたびにもとに戻してから, 次の個体を抽出することを「復元抽出」といい, もとに戻さずに続けて抽出することを「非復元抽出」という。

要点 ② 母集団の分布

大きさ N の母集団において，変量 x の値が x_1，x_2，……，x_n である個体がそれぞれ f_1，f_2，……，f_n 個あるとする。

この母集団から，1 個の個体を無作為に抽出し，その変量 x の値を X とする。

各個体が抽出される確率はすべて等しいから，X の確率分布は右の表のようになる。

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	$\frac{f_1}{N}$	$\frac{f_2}{N}$	$\cdots$	$\frac{f_n}{N}$	1

この確率変数 X の確率分布を「　　　　　　」という。

また，X の期待値を「　　　　」，分散を「　　　　」，

標準偏差を「　　　　　　」といい，それぞれ m，σ^2，σ で表す。

例　2 と書かれたカードが 30 枚，4 と書かれたカードが 20 枚，6 と書かれたカードが 10 枚ある。この 60 枚のカードを母集団とし，カードの数字を変量とするとき，母集団分布，母平均 m，母分散 σ^2，母標準偏差 σ を求める。

母集団から 1 枚のカードを抽出し，そのカードに書かれた数字を X とすると，母集団分布は右の表のようになる。よって

X	2	4	6	計
P	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$$m=2\cdot\frac{3}{6}+4\cdot\frac{2}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=\frac{10}{3}$$

$$\sigma^2=\left(2^2\cdot\frac{3}{6}+4^2\cdot\frac{2}{6}+6^2\cdot\frac{1}{6}\right)-\left(\frac{10}{3}\right)^2=\frac{20}{9}$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{20}{9}}=\frac{2\sqrt{5}}{3}$$

1 1, 2, 3, 4 と書かれた球がそれぞれ 1 個, 2 個, 3 個, 4 個ある。この 10 個の球を母集団とし, 球の数字を変量とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 母集団分布を求めよ。

(2) 母平均 m，母分散 σ^2，母標準偏差 σ を求めよ。

Point Pickup

母集団の分布

母集団から 1 個の個体を無作為に抽出したときの変量 x の値を X とするとき, X の確率分布を「母集団分布」という。

母平均　$m=E(X)$

母分散　$\sigma^2=V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

母標準偏差 $\sigma=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{V(X)}$

[MEMO]

§2 標本平均の分布

要点整理 と 公式

要点① 標本平均の期待値，分散，標準偏差

ある母集団から大きさ n の標本を無作為抽出する。この標本の各個体の変量の値を X_1，X_2，……，X_n とする。このとき，これらの平均

X	X_1	X_2	…	X_n	$\overline{X}$
標本 1			…		
標本 2					
⋮					

$$\overline{X}=\frac{X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n}{n}$$

を「　　　　　」という。X_1，X_2，……，X_n はそれぞれ，標本の抽出によって値が定まる確率変数であるから，標本平均 $\overline{X}$ もまた，標本の抽出によって値が定まる確率変数である。

母平均 m，母分散 σ^2，母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の標本を無作為抽出し，この標本の各個体の変量の値を X_1，X_2，……，X_n とする。

この抽出が「　　　　　」の場合，X_1，X_2，……，X_n のそれぞれは，母集団から大きさ 1 の標本を抽出することで得られる確率変数とみなすことができ，それぞれ母集団と同じ確率分布をもつ。よって

$$E(X_1)=E(X_2)=\cdots\cdots=E(X_n)=m,\qquad V(X_1)=V(X_2)=\cdots\cdots=V(X_n)=\sigma^2$$

が成り立つ。このとき

$$E(X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots\cdots+E(X_n)=$$

X_1，X_2，……，X_n は互いに独立であるから

$$V(X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n)=V(X_1)+V(X_2)+\cdots\cdots+V(X_n)=$$

したがって，標本平均 $\overline{X}$ の

期待値　$E(\overline{X})=E\left(\dfrac{X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n}{n}\right)=\qquad E(X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n)=\dfrac{1}{n}\cdot nm=m$

分散　$V(\overline{X})=V\left(\dfrac{X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n}{n}\right)=\qquad V(X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n)=\dfrac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2=\dfrac{\sigma^2}{n}$

標準偏差　$\sigma(\overline{X})=\sqrt{V(\overline{X})}=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

標本の抽出が非復元抽出の場合は，X_1，X_2，……，X_n は互いに独立ではない。しかし，母集団の大きさ N が標本の大きさ n に比べて十分大きい場合は，復元抽出と非復元抽出の違いは小さい。よって，非復元抽出による標本を，復元抽出による標本とみなすことができる。

以上より，次のことが成り立つ。

標本平均の期待値，分散，標準偏差

母平均 m，母分散 σ^2，母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の標本を無作為抽出するとき，その標本平均 $\overline{X}$ の

期待値 $E(\overline{X})=m$　　分散 $V(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}$　　標準偏差 $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

例 母平均 60，母標準偏差 5 の母集団から，大きさ 9 の標本を無作為抽出するとき，その標本平均 $\overline{X}$ の

期待値 $E(\overline{X})=\quad$ ，　分散 $V(\overline{X})=\dfrac{\quad}{\quad}=\dfrac{25}{9}$，　標準偏差 $\sigma(\overline{X})=\quad=\dfrac{5}{3}$

要点 ② 標本平均の分布と正規分布

一般に , 母集団がどのような分布であっても , 次のことが成り立つことが知られている。

標本平均の分布

母平均 m，母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の標本を無作為抽出するとき，

その標本平均 $\overline{X}$ の分布は，n が十分大きいとき，近似的に正規分布 $N\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う。

例 母平均 60，母標準偏差 10 の母集団から，大きさ 100 の標本を無作為抽出するとき，その標本平均 $\overline{X}$ が 62 以上となる確率を求める。

標本平均 $\overline{X}$ の分布は近似的に $N\left(\quad,\quad\right)$，すなわち $N(60,\ 1^2)$ に従う。

$Z=\dfrac{\overline{X}-60}{1}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

よって，$P(\overline{X}\geqq 62)=P(Z\geqq 2)=0.5-0.4772=0.0228$

※母集団分布が正規分布のときは，標本の大きさ n に関係なく，標本平均 $\overline{X}$ の分布も正規分布に従う。

※標本の大きさ n を限りなく大きくしていくと，標本平均 $\overline{X}$ の標準偏差 $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ は限りなく 0 に近づき，$\overline{X}$ の分布は母平均 m の近くに限りなく集中する。つまり，標本平均 $\overline{X}$ は，標本の大きさ n を大きくしていくと，母平均 m に近づいていく。これを「大数の法則」という。

2 母平均 170, 母標準偏差 5 の母集団から，標本を無作為抽出し , その標本平均を $\overline{X}$ とする。

(1) 大きさ 16 の標本を抽出するとき，$\overline{X}$ の期待値，標準偏差を求めよ。

(2) 大きさ 100 の標本を抽出するとき，$\overline{X}$ が 169 以上 171 以下となる確率を求めよ。

Point Pickup

標本平均の期待値，標準偏差

母平均 m，母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の標本を無作為抽出するとき，
その標本平均 $\overline{X}$ の

期待値 $E(\overline{X})=m$　　　　標準偏差 $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

標本平均の分布

母平均 m，母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の標本を無作為抽出するとき，
その標本平均 $\overline{X}$ の分布は，n が十分大きいとき，近似的に正規分布 $N\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う。

[MEMO]

§3 母平均の推定

要点整理 と 公式

要点 ① 母平均の推定

標本調査の目的は，抽出された標本の性質から，母集団の性質を推測することである。ここでは，母平均がわかっていない母集団から無作為抽出された標本の標本平均を用いて，母平均を推定する。

母平均 m，母分散 σ^2 である母集団から抽出された大きさ n の標本の標本平均 $\overline{X}$ について，n が十分に大きいとき，$\overline{X}$ の分布は近似的に正規分布　　　　　　　に従う。よって，

$Z=\dfrac{\overline{X}-\quad}{\qquad}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

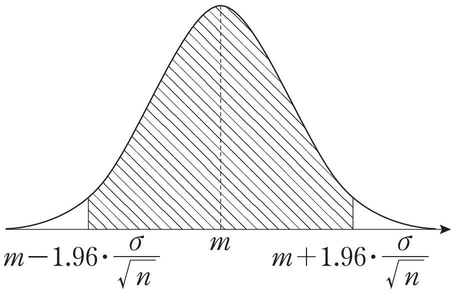
ここで，$P(-u\leqq Z\leqq u)=0.95$ となる u を求めると，正規分布表より $u=$　　　である。よって

$$P\left(-1.96\leqq\dfrac{\overline{X}-m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}\leqq 1.96\right)=0.95$$

と表される。この式のかっこの中を変形すると

$$P\left(m-1.96\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\leqq\overline{X}\leqq m+1.96\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=0.95$$

であり，さらにかっこの中を m の値の範囲として表すと



$$P\left(\overline{X}-1.96\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\leqq m\leqq\overline{X}+1.96\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=0.95$$

となる。この式は，区間 $\overline{X}-1.96\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\leqq m\leqq\overline{X}+1.96\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ に母平均 m の値を含む確率が約 95％であることを示している。この区間を，母平均 m に対する「　　　　」95％の「　　　　　」という。

母平均の推定

母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の標本を無作為抽出するとき，n が十分大きいならば，母平均 m に対する信頼度 95%の信頼区間は

$$\overline{X}-1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqq m \leqq \overline{X}+1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

母平均 m に対して，信頼度 95% の信頼区間を求めることを，信頼度 95% で推定する，という。

例　ある試験を受けた生徒の中から，100 人を無作為抽出して調査したところ，その平均点は 59.8 点であった。母標準偏差を 13.0 点として，この試験を受けた生徒全体の平均点を，信頼度 95% で推定する。

標本平均は $\overline{X}=59.8$，母標準偏差は $\sigma=13.0$，標本の大きさは $n=100$ より，

信頼度 95% の信頼区間は

$$\qquad - \qquad\qquad \leqq m \leqq \qquad + \qquad$$

$$57.252 \leqq m \leqq 62.348$$

よって，母平均は信頼度 95% で 57.3 点以上 62.3 点以下 と推定される。

標本平均 $\overline{X}$ の値は，抽出される標本ごとに異なるため，実際の母平均の推定においては，標本を抽出して信頼区間を求めることを 1 度だけ行い，その結果を信頼区間として用いる。

母平均 m に対する信頼度 95% の信頼区間の場合，標本を抽出して信頼区間を求めることを多数回くり返すと，その中に母平均 m を含む区間が 95%程度あることが期待される。

母標準偏差 σ がわからないときは，標本の大きさ n が大きければ，母標準偏差 σ のかわりに標本の標準偏差を用いてもよいことが知られている。

3 ある工場で製造しているある製品から 784 個を無作為に抽出し，その重さを調べたところ，平均 314.15g であった。母標準偏差を 24g として，この工場で製造しているこの製品の重さの平均を信頼度 95% で推定せよ。

Point Pickup

母平均の推定

母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の標本を無作為抽出するとき，n が十分大きいならば，母平均 m に対する信頼度 95%の信頼区間は

$$\overline{X}-1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqq m \leqq \overline{X}+1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

母標準偏差 σ がわからないときは，母標準偏差 σ のかわりに標本の標準偏差を用いてもよい。

[MEMO]

§4 仮説検定

要点整理 と 公式

要点① 仮説検定

「仮説検定」… ある仮説を立てて，それが成り立つかどうかを統計的に検証する手法

仮説検定の主な流れは以下の通り。

Ⅰ　主張したい仮説 H_1 を立てる。

Ⅱ　H_1 に反する仮説 H_0 を立てる。

Ⅲ　H_0 が正しいかどうかを統計的に検証し

(i) 正しくないと判断できる場合　→ H_1 が正しいといえる

(ii) 正しくないとは判断できない場合 → H_1 が正しいとはいえない

仮説 H_0 を「　　　　　」，仮説 H_1 を「　　　　　」という。

Ⅲにおいて，帰無仮説 H_0 が正しくないと判断することを，帰無仮説を「　　　　　」という。

帰無仮説が棄却されるかどうかを判断するための基準となる確率を「　　　　　」(または危険率) という。帰無仮説のもとで，標本抽出の結果，またはその結果以上に極端な結果が得られる確率を求め，その確率が有意水準以下の場合，それはほとんど起こりえないと判断し，帰無仮説を棄却し，対立仮説を採択することができる。

求めた確率が有意水準より大きい場合は，帰無仮説を棄却できない。ただし，これにより帰無仮説が正しいと判断できるわけではない。

有意水準は，0.05(5%)，または 0.01(1%) とすることが多い。

例　ある 1 枚の硬貨を 100 回投げて，表が 60 回出た。この結果から，この硬貨は表が出やすいと判断してよいかを，有意水準を 5% として検定する。

対立仮説 H_1 は「この硬貨は　　　　　　　」

帰無仮説 H_0 は「この硬貨は　　　　　　　　　　　」

H_0 が正しいとするとき，この硬貨を投げて表が出る回数を X とすると，X は二項分布

　　　　　に従う。X の期待値 m と標準偏差 σ は

$$m = \qquad = 50, \qquad \sigma = \qquad = 5$$

$n = 100$ は十分に大きいから，X は正規分布　　　　　に従うとみなしてよい。

ここで，$Z=\dfrac{X\qquad}{\qquad}$ とすると，Z は標準正規分布　　　　　に従う。

$X=60$ のとき，$Z=$　 であるから，硬貨を 100 回投げて，表が 60 回　　　出る確率は，正規分布表より

$$P(\qquad)=P(\qquad)$$

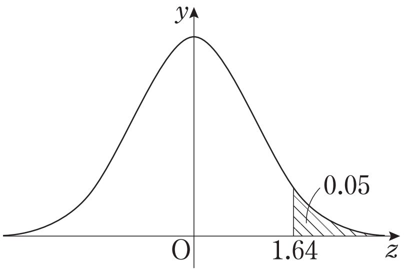
$$=0.5-P(0\leqq Z\leqq 2)=0.5-0.4772=0.0228$$

つまり，約 2.3% であり，有意水準 5% に比べて　　　　　。

よって，帰無仮説 H_0 は　　　　　。

したがって，この硬貨は表が出やすいと　　　　　　。

正規分布表より $P(Z\leqq 1.64)\fallingdotseq 0.95$ であるから，$P(Z\geqq 1.64)\fallingdotseq 0.05$ である。つまり，$Z\geqq 1.64$ となる事象は，確率 5% でしか起こらない。$Z=2$ はこの範囲に含まれているから，$X=60$ は帰無仮説 H_0 のもとでは起こる可能性が低いことが起こった，ということができるため，H_0 は棄却できる。

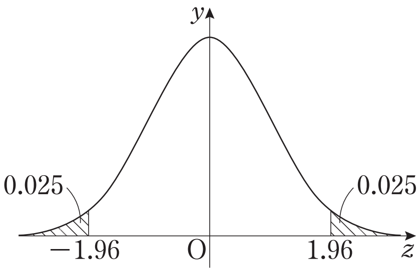


有意水準に対して，帰無仮説が棄却される確率変数の値の範囲を「棄却域」という。上の例においては，棄却域は $Z\geqq 1.64$ である。

「硬貨の表と裏の出方に差がある」ことを判断するために，表が出た回数が大きすぎる場合も小さすぎる場合も帰無仮説が棄却されるように，棄却域を両側にとる場合もある。有意水準 0.05 のときは

$$P(-1.96\leqq Z\leqq 1.96)\fallingdotseq 0.95$$

より，棄却域は $Z\leqq -1.96$，$1.96\leqq Z$ である。



4 3 人のアーティスト A，B，C は同じ程度の人気があると言われている。この 3 人のうち誰が好みかについて，無作為に選んだ 288 人に調査を行ったところ，A を選んだ人が 104 人で，B，C に比べて多かった。この結果から，A，B，C の 3 人から A を選ぶ人の割合は $\frac{1}{3}$ ではないと判断してよいか。有意水準を 5% として検定せよ。

Point Pickup

仮説検定

仮説検定の主な流れは以下

① 主張したい仮説 H_1（対立仮説）に反する仮説 H_0（帰無仮説）を立てる。

② H_0 のもとで，標本調査の結果またはそれ以上に極端な結果が得られる確率を求める。

③ ②の結果が

有意水準以下の場合 → H_0 を棄却できる。
よって，H_1 が正しいと判断できる。

有意水準より大きい場合 → H_0 を棄却できない。
よって，H_1 が正しいとは判断できない。

[MEMO]

第 31 講　確認テスト

1 10 点のカードが 20 枚，5 点のカードが 30 枚，1 点のカードが 50 枚ある。この 100 枚のカードを母集団とし，カードの点数を X とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 母集団分布を求めよ。

X	10	5	1	計
P	$\dfrac{\boxed{アイ}}{100}$	$\dfrac{\boxed{ウエ}}{100}$	$\dfrac{\boxed{オカ}}{100}$	1

(2) 母平均 m，母分散 σ^2，母標準偏差 σ を求めよ。

$m = \boxed{キ}$

$\sigma^2 = \boxed{クケ}$

$\sigma = \boxed{コ}\sqrt{\boxed{サ}}$

2 母平均 58，母標準偏差 10 の母集団から，標本を無作為抽出し，その標本平均を $\overline{X}$ とするとき，次の問いに答えよ。

＜正規分布表＞

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852

(1) 大きさ 25 の標本を抽出するとき，$\overline{X}$ の期待値，標準偏差を求めよ。

$E(\overline{X}) = \boxed{シス}$，$\sigma(\overline{X}) = \boxed{セ}$

(2) 大きさ 225 の標本を抽出するとき，$\overline{X}$ が 57.5 以上 58.5 以下となる確率は $\boxed{ソ}$ である。

$\boxed{ソ}$ に当てはまるものを下の①～⑥のうちから選べ。

① 0.1915　② 0.2157　③ 0.2734

④ 0.3830　⑤ 0.4314　⑥ 0.5468

3　ある農場で生産した卵の中から 400 個を無作為に抽出し，その重さを調べたところ，平均は 53.4 g であった。母標準偏差を 2.5 g として，この農場で生産されている卵の重さの平均を信頼度 95％で推定すると，［タ］となる。

［タ］に当てはまるものを下の①～④のうちから選べ。

① 48.5 g 以上 58.3 g 以下
② 53.1 g 以上 53.7 g 以下
③ 53.2 g 以上 53.6 g 以下
④ 53.3 g 以上 53.5 g 以下

4　ある飲料メーカーが新商品を開発した。無作為に選んだ 256 人に，この飲料を試飲してもらい，従来の商品とどちらを好むか調査を行ったところ，新商品を好む人は 142 人であった。この結果から，新商品を好む人が多いと判断してよいか，有意水準を 5％として検定せよ。

［チ］

＜正規分布表＞

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633

［チ］に当てはまるものを下の①～④のうちから選べ。

① 新商品を好む人の方が多いと判断できる。
② 新商品を好む人の方が多いとは判断できない。
③ 新商品と従来の商品を好む人は同程度であると判断できる。
④ 従来の商品を好む人の方が多いと判断できる。

第 31 講　統計的な推測

§1　母集団と標本

1　1, 2, 3, 4 と書かれた球がそれぞれ 1 個, 2 個, 3 個, 4 個ある。この 10 個の球を母集団とし, 球の数字を変量とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　母集団分布を求めよ。

(2)　母平均 m，母分散 σ^2，母標準偏差 σ を求めよ。

[解答]

母集団から 1 つの球を抽出し，その球に書かれた数字を X とする。

(1)　母集団分布は右の表

X	1	2	3	4	計
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	1

(2)　$m=1\cdot\frac{1}{10}+2\cdot\frac{2}{10}+3\cdot\frac{3}{10}+4\cdot\frac{4}{10}=\frac{30}{10}=3$

$$\sigma^2=\left(1^2\cdot\frac{1}{10}+2^2\cdot\frac{2}{10}+3^2\cdot\frac{3}{10}+4^2\cdot\frac{4}{10}\right)-3^2$$

$$=\frac{100}{10}-9=1$$

$$\sigma=\sqrt{1}=1$$

§2 標本平均の分布

2 母平均 170, 母標準偏差 5 の母集団から，標本を無作為抽出し , その標本平均を $\overline{X}$ とする。

(1) 大きさ 16 の標本を抽出するとき，$\overline{X}$ の期待値，標準偏差を求めよ。

(2) 大きさ 100 の標本を抽出するとき，$\overline{X}$ が 169 以上 171 以下となる確率を求めよ。

[解答]

(1) $\overline{X}$ の期待値は $E(\overline{X})=170$，標準偏差は $\sigma(\overline{X})=\dfrac{5}{\sqrt{16}}=\dfrac{5}{4}$

(2) $\overline{X}$ の分布は近似的に $N\left(170,\ \dfrac{5^2}{100}\right)$，すなわち $N\left(170,\ \dfrac{1}{4}\right)$ に従う。

$\dfrac{1}{4}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ より，$Z=\dfrac{\overline{X}-170}{\frac{1}{2}}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

よって，$P(169\leqq\overline{X}\leqq171)=P(-2\leqq Z\leqq2)=2P(0\leqq Z\leqq2)=2\cdot0.4772=0.9544$

§3 母平均の推定

3 ある工場で製造しているある製品から 784 個を無作為に抽出し，その重さを調べたところ，平均 314.15 g であった。母標準偏差を 24 g として，この工場で製造しているこの製品の重さの平均を信頼度 95% で推定せよ。

[解答]

標本平均は $\overline{X}=314.15$，母標準偏差は $\sigma=24$，標本の大きさは $n=784$ より，
信頼度 95% の信頼区間は

$$314.15-1.96\cdot\frac{24}{\sqrt{784}} \leqq m \leqq 314.15+1.96\cdot\frac{24}{\sqrt{784}}$$

$$314.15-1.96\cdot\frac{6}{7} \leqq m \leqq 314.15+1.96\cdot\frac{6}{7}$$

$$312.47 \leqq m \leqq 315.83$$

よって，母平均は信頼度 95% で 312.47 g 以上 315.83 g 以下 と推定される。

§4 仮説検定

4 3 人のアーティスト A，B，C は同じ程度の人気があると言われている。この 3 人のうち誰が好みかについて，無作為に選んだ 288 人に調査を行ったところ，A を選んだ人が 104 人で，B，C に比べて多かった。この結果から，A，B，C の 3 人から A を選ぶ人の割合は $\frac{1}{3}$ ではないと判断してよいか。有意水準を 5% として検定せよ。

[解答]

対立仮説 H_1 は「A を選ぶ人の割合は $\frac{1}{3}$ ではない」である。

帰無仮説 H_0 は「A を選ぶ人の割合は $\frac{1}{3}$」である。

H_0 が正しいとするとき，A を選ぶ人数を X とすると，X は二項分布 $B\left(288,\ \frac{1}{3}\right)$ に従う。X の期待値 m と標準偏差 σ は

$$m=288\cdot\frac{1}{3}=96,\qquad \sigma=\sqrt{288\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}=8$$

$n=288$ は十分に大きいから，X は正規分布 $N(96,\ 8^2)$ に従うとみなしてよい。

ここで，$Z=\frac{X-96}{8}$ とすると，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

$X=104$ のとき，$Z=1$ であるから，288 人中 104 人以上が A を選ぶ確率は，
正規分布表より

$$P(X\geqq 104)=P(Z\geqq 1)=0.5-P(0\leqq Z\leqq 1)=0.5-0.3413=0.1587$$

つまり，約 15.9% であり，有意水準 5% に比べて大きい。

よって，帰無仮説 H_0 は棄却できない。

したがって，A を選ぶ人の割合は $\frac{1}{3}$ ではないとは判断できない。

第31講　確認テスト 解答

1

(1)　**[正解]** アイ：20，ウエ：30，オカ：50

[解説]

母集団分布は下の表のようになる。 [A]

X	10	5	1	計
P	$\frac{\mathbf{20}}{\mathbf{100}}$	$\frac{\mathbf{30}}{\mathbf{100}}$	$\frac{\mathbf{50}}{\mathbf{100}}$	1

[A]　母集団から 1 個の個体を無作為に抽出したときの変量 x の値を X とするとき，X の確率分布を「母集団分布」という。

(2)　**[正解]** キ：4，クケ：12，コ：2，サ：3

[解説]

母集団分布は下の表のようになる。

X	10	5	1	計
P	$\frac{20}{100}$	$\frac{30}{100}$	$\frac{50}{100}$	1

母平均は

$$m=10\cdot\frac{20}{100}+5\cdot\frac{30}{100}+1\cdot\frac{50}{100}$$ [B]

$$=\frac{400}{100}=\mathbf{4}$$

母分散は

$$\sigma^2=\left(10^2\cdot\frac{20}{100}+5^2\cdot\frac{30}{100}+1^2\cdot\frac{50}{100}\right)-4^2$$

$$=\frac{2800}{100}-16=\mathbf{12}$$

母標準偏差は

$$\sigma=\sqrt{12}=\mathbf{2\sqrt{3}}$$

[B]　母集団から 1 個の個体を無作為に抽出したときの変量 x の値を X とするとき，
母平均 $m=E(X)$
母分散 $\sigma^2=V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$
母標準偏差 $\sigma=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{V(X)}$

2

(1)　**[正解]シス**：58，**セ**：2

[解説]

$\overline{X}$ の期待値は $E(\overline{X})=\mathbf{58}$　[C]

$$\text{標準偏差は } \sigma(\overline{X})=\frac{10}{\sqrt{25}}=\mathbf{2}$$

[C]　母平均 m，母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の標本を無作為抽出するとき，その標本平均 $\overline{X}$ の

期待値 $E(\overline{X})=m$

標準偏差 $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

(2)　**[正解]ソ**：⑥

[解説]

$\overline{X}$ の分布は近似的に正規分布 $N\left(58,\ \dfrac{10^2}{225}\right)$，

すなわち $N\left(58,\ \dfrac{4}{9}\right)$ に従う。　[D]

[D]　母平均 m，母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の標本を無作為抽出するとき，その標本平均 $\overline{X}$ の分布は，n が十分大きいとき，近似的に正規分布 $N\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う。

$\dfrac{4}{9}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2$ より，$Z=\dfrac{\overline{X}-58}{\dfrac{2}{3}}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

よって

$$\begin{aligned} P(57.5\leqq \overline{X}\leqq 58.5) &= P(-0.75\leqq Z\leqq 0.75) \\ &= 2P(0\leqq Z\leqq 0.75) \\ &= 2\cdot 0.2734=\mathbf{0.5468} \end{aligned}$$

3

[正解]タ：③

[解説]

標本平均は $\overline{X}=53.4$，母標準偏差は $\sigma=2.5$，標本の大きさは $n=400$ より，母平均 m に対する信頼度 95% の信頼区間は

$$53.4-1.96\cdot\frac{2.5}{\sqrt{400}}\leqq m\leqq 53.4+1.96\cdot\frac{2.5}{\sqrt{400}}$$　[E]

$$53.4-1.96\cdot\frac{1}{8}\leqq m\leqq 53.4+1.96\cdot\frac{1}{8}$$

$$53.155\leqq m\leqq 53.645$$

よって，母平均は信頼度 95% で **53.2g 以上 53.6g 以下**と推定される。

[E]　母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の標本を無作為抽出するとき，n が十分大きいならば，母平均 m に対する信頼度 95%の信頼区間は

$$\overline{X}-1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leqq m\leqq \overline{X}+1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

4 **[正解]** チ：①

[解説]

対立仮説 H_1 は「新商品を好む人は従来の商品を好む人よりも多い」である。

帰無仮説 H_0 は「新商品と従来の商品を好む人の人数は変わらない」である。

H_0 が正しいとするとき，新商品を選ぶ人数を X とすると，X は二項分布 $B\left(256,\ \frac{1}{2}\right)$ に従う。

X の期待値 m と標準偏差 σ は

$$m=256\cdot\frac{1}{2}=128$$

$$\sigma=\sqrt{256\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}=8$$

$n=256$ は十分に大きいから，X は正規分布 $N(128,\ 8^2)$ に従うとみなしてよい。

ここで，$Z=\frac{X-128}{8}$ とすると，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

$X=142$ のとき，$Z=1.75$ であるから，256 人中 142 人以上が新商品を選ぶ確率は，正規分布表より

$$\begin{aligned}P(X\geqq 142)&=P(Z\geqq 1.75)\\&=0.5-P(0\leqq Z\leqq 1.75)\\&=0.5-0.4599=0.0401\end{aligned}$$

つまり，約 4%であり，有意水準 5%に比べて小さい。 [F]

よって，帰無仮説 H_0 を棄却できる。

したがって，**新商品を好む人の方が多いと判断できる。**

［F］ 帰無仮説のもとで，標本調査の結果，またはそれ以上に極端な結果が得られる確率を求める。その確率が
- 有意水準以下の場合
  ⇒ H_0 を棄却できる
  （H_1 が正しいと判断できる）
- 有意水準より大きい場合
  ⇒ H_0 を棄却できない
  （H_1 が正しいとは判断できない）